Die Erfahrungsnachwirkung bei Wahrscheinlichkeiten

Von H. HADWIGER, Bern

Wir betrachten eine mit der Zeit t veränderliche Wahrscheinlichkeit

$$p(t) = \frac{A(t)}{A(t)+B(t)}, \tag{1}$$

wobei $A(t)$ das Maß der günstigen, $B(t)$ das Maß der ungünstigen Fälle im Zeitpunkt t bezeichnen soll. Die in Betracht gezogene Veränderlichkeit der Wahrscheinlichkeit (1) sei eine Folge einer sogenannten *Erfahrungsnachwirkung*. Darunter wollen wir hier folgendes verstehen:

Wenn das Gegenereignis, dessen Wahrscheinlichkeit also $1-p(t)$ sein wird, tatsächlich eintritt, so soll dies eine «Erfahrung» darstellen, welche zur Folge haben soll, daß die Maßzahl $B(t)$ der ungünstigen Fälle eine gewisse Reduktion erfährt[1]. Wenn sich nun im Laufe der Zeit nach Maßgabe der ihnen jeweils zukommenden Wahrscheinlichkeiten solche Gegenereignisse einstellen, so wird auf diese Weise die Wahrscheinlichkeit (1) zunehmen müssen. Es soll nun unsere Aufgabe sein, einen zweckdienlichen *Ansatz* für die Erfassung der soeben auseinandergesetzten Erfahrungsnachwirkung aufzustellen, und das *mathematische Gesetz*, nach welchem die Wahrscheinlichkeit (1) zunimmt, zu ermitteln.

Im Hinblick auf die gegebenen Erklärungen ist die nachfolgende Ansatzbildung naheliegend:

a) Die Maßzahl $A(t)$ bleibt konstant.

b) Die Maßzahl $B(t)$ erfährt eine Reduktion, die proportional dem Erwartungswert der Anzahl der im Zeitintervall 0 bis t erfolgenden Gegenereignisse ist. Hierbei werde eine konstante Total-Ereignisdichte vorausgesetzt.

[1] Naturgemäß mußte die Darstellung hier allgemein gehalten werden. Es ist aber sehr nützlich, sich die Sachlage durch Wahl eines konkreten Falles klarzumachen. Beispielsweise dient das folgende Modell: Ein Arbeiter sei an einer Maschine beschäftigt, d. h. er verrichte etwa pro Zeiteinheit dort eine Manipulation. A sei nun die Zahl der zulässigen Manipulationen, B dagegen die Zahl der Fehlmanipulationen, die einen Betriebsunfall bewirken. Bei grober Schematisierung ist dann die Wahrscheinlichkeit für den Arbeiter, pro Zeiteinheit *keinen* Unfall zu erleiden, durch den Quotienten $A/A+B$ gegeben. Wenn nun aber tatsächlich ein Unfall passiert, so wird damit eine Erfahrung verbunden. Die Nachwirkung besteht darin, daß sich der Arbeiter (oder sein Nachfolger!) die betreffende Manipulation, die zum Unfall führte, merkt, oder daß eine Wiederholung durch besondere Maßnahmen verunmöglicht wird. Dies kommt einer Reduktion der Zahl B der möglichen Fehlmanipulationen um 1 gleich. Nach K sich im Laufe der Zeit eingestellten Betriebsunfällen ist die Wahrscheinlichkeit, keinen Unfall zu erleiden, auf $A/A+B-K$ angestiegen. Dieser konkreten Deutung von p als Unfallwahrscheinlichkeit lassen sich noch verschiedene andere ebenso einfache Interpretationsmöglichkeiten (Erkrankungs- oder Infektionswahrscheinlichkeit, Ausscheidewahrscheinlichkeit bei biologischen Gesamtheiten u. a. m.) an die Seite stellen, wobei eine analoge zeitliche Beeinflussung durch Erfahrung wirksam ist.

Demzufolge soll also

$$A(t) = A(0); \quad B(t) = B(0)\left\{1-\lambda\int_0^t [1-p(\xi)]\,d\xi\right\} \tag{2}$$

sein. Der Proportionalitätsfaktor λ ist hierbei eine dem betreffenden Nachwirkungsprozeß zugeordnete Konstante. Führen wir noch die Hilfskonstante ω durch

$$\omega = \frac{B(0)}{A(0)}; \quad p(0) = \frac{1}{1+\omega} \tag{3}$$

ein, so läßt sich zufolge des Ansatzes (2) für die Wahrscheinlichkeit (1) der Ausdruck schreiben

$$p(t) = \frac{1}{1+\omega-\omega\lambda\int_0^t [1-p(\xi)]\,d\xi} \tag{4}$$

Da nun in (4) die zu ermittelnde Wahrscheinlichkeit p auf beiden Seiten vorkommt, liegt eine einfache Funktionalgleichung vor, die in naheliegender Weise sofort in eine Differentialgleichung umgewandelt werden kann. Zunächst schreibt man

$$1+\omega-\omega\lambda\int_0^t [1-p(\xi)]\,d\xi = \frac{1}{p(t)},$$

eine Beziehung, die nach t differenziert[1]

$$-\omega\lambda(1-p) = -\frac{p'}{p^2}$$

liefert, so daß nach einfacher Umformung nun die *Differentialgleichung der Erfahrungsnachwirkung*

$$\boxed{p' = \omega\lambda(p^2-p^3)} \tag{5}$$

entsteht. Eine erste einfache Diskussion lehrt, daß die Integralkurven, die zu Anfangswerten $0 < p(0) < 1$ gehören, monoton steigend gegen den asymptotischen Wert 1 streben. Wie man aus (5) ableitet, gilt

$$p'' = \omega^2\lambda^2 p^3(2-5p+3p^2). \tag{6}$$

In den Fällen $p(0) < \frac{2}{3}$ besitzen also die Integralkurven an der Stelle, wo p den Wert $\frac{2}{3}$ erreicht, einen Wendepunkt[2].

Nachfolgend treten wir nun auf Darstellungen der sich als Lösung der Differentialgleichung (5) ergebenden Wahrscheinlichkeit ein.

Die Trennung der Veränderlichen ergibt zunächst die Differentialformel

$$\frac{dp}{p^2(1-p)} = \omega\lambda\,dt,$$

die sodann integriert

[1] p sei nachfolgend eine Abkürzung für $p(t)$.

[2] Der Wahrscheinlichkeitswert an der Wendestelle hängt also bemerkenswerterweise nicht von den Konstanten des Nachwirkungsvorganges ab.

$$\log \frac{p}{1-p} - \frac{1}{p} = \omega \lambda t + \log \frac{p(0)}{1-p(0)} - \frac{1}{p(0)}$$

liefert. Mit Verwendung der Hilfskonstanten (3) läßt sich nun die Schlüsselrelation

$$\frac{p}{1-p} e^{-\frac{1}{p}} = \frac{1}{\omega} e^{-(1+\omega)+\omega \lambda t} \tag{7}$$

aufschreiben. Diese kann zunächst dazu verwendet werden, um eine asymptotische Formel abzuleiten. Lösen wir nämlich die sich aus (7) ergebende Beziehung

$$\frac{p}{1-p} = \frac{1}{\omega} e^{-(1+\omega)+\frac{1}{p}+\omega \lambda t}$$

nach dem auf der linken Seite stehenden p auf, so ergibt sich

$$p = \frac{1}{1+\omega e^{1+\omega-\frac{1}{p}-\omega \lambda t}}, \tag{8}$$

so daß im Hinblick auf $p \to 1$ für $t \to \infty$ die asymptotische Formel

$$\boxed{p(t) \sim \frac{1}{1+\omega e^{\omega(1-\lambda t)}}} \tag{9}$$

erzielt wird. Damit ist gezeigt, daß die Zunahme der Wahrscheinlichkeit bei einer Erfahrungsnachwirkung der von uns betrachteten Art asymptotisch durch ein *logistisches Gesetz* gegeben ist[1].

Um eine explizite Reihendarstellung der Lösung zu gewinnen, greifen wir auf die Schlüsselbeziehung (7) zurück. Setzen wir dort

$$z = \frac{1-p}{p} \quad \text{und} \quad w = \omega e^{\omega(1-\lambda t)},$$

so nimmt diese die einfache Form einer transzendenten Beziehung zwischen den Größen z und w an, nämlich

$$z e^{z} = w. \tag{10}$$

Es existiert eine im Punkt $w=0$ reguläre und dort verschwindende Auflösung z, die in einem hinreichend kleinen Kreis um 0 in eine konvergente Potenzreihe nach w entwickelt werden kann. Es sei also

$$z = \sum_{1}^{\infty} a_n w^n. \tag{11}$$

Die Koeffizienten dieser Entwicklung lassen sich in bekannter Weise durch die CAUCHYschen Integrale

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{z\, dw}{w^{n+1}} \tag{12}$$

darstellen, wobei sich die Integration über einen nicht zu großen, den Punkt $w=0$ umschließenden Kreis zu erstrecken hat. Führen wir jetzt in (12) die Veränderliche z als Integrationsvariable ein, so ist die Substitution nach (10) zu bewerkstelligen. Der neue Integrationsweg ist dann das Bild des oben erwähnten Kreises in der z-Ebene, also eine kleine, den Punkt $z=0$ einfach umschließende Kurve. So erhalten wir nach einer zweckmäßigen Umformung

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int e^{-nz} \left(\frac{1}{z^{n-1}} - \frac{1}{z^n}\right) dz. \tag{13}$$

Werden nun die beiden Teile, in die sich das Integral (13) aufspalten läßt, wiederum als CAUCHYsche Integralformeln gelesen, so ergibt sich endlich

$$a_n = \frac{(-n)^{n-2}}{(n-2)!} + \frac{(-n)^{n-1}}{(n-1)!} = (-1)^{n-1} \frac{n^{n-1}}{n!}. \tag{14}$$

So erhalten wir die gesuchte Potenzreihe[1]

$$z = \sum_{1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^{n-1}}{n!} w^n. \tag{15}$$

Wie sich auf Grund der bekannten STIRLINGschen Formel mühelos verifizieren läßt, gilt

$$\sqrt[n]{\frac{n^{n-1}}{n!}} \to e \quad (n \to \infty),$$

so daß sich als Konvergenzradius der Reihe (15)

$$\varrho = \frac{1}{e} \tag{16}$$

ergibt. Gemäß der oben erfolgten Substitution ist

$$p = \frac{1}{1+z} \quad \text{und}\ w = \omega e^{\omega(1-\lambda t)},$$

so daß sich nun die vollständige Darstellung für die Wahrscheinlichkeit p anschreiben läßt, nämlich

$$\boxed{p(t) = \frac{1}{1+\sum_{1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^{n-1}\omega^n}{n!} e^{n\omega(1-\lambda t)}}} \tag{17}$$

Zur Abklärung der Konvergenzfrage muß auf (16)

[1] In diesem Zusammenhang verdient sicher der Umstand einige Beachtung, daß die logistische Funktion von verschiedenen Autoren bereits zur Darstellung der zeitlichen Änderung von Wahrscheinlichkeitswerten herangezogen wurde. Dies geschah z. B. bei der formelmäßigen Erfassung der Sterblichkeitsabnahme (Lebensverbesserung) durch W. P. SCHULER: Ein Verfahren zum Einbezug der säkularen Sterblichkeitsabnahme in die versicherungstechnischen Berechnungen, M.V.S.V. *44*, Heft 1, 107—149 (1944). Die Wahl des logistischen Ansatzes geschieht in allen diesen Fällen unseres Wissens ohne apriorische Motivierung; ausschlaggebend ist eine gute Bewährung, die zum großen Teil auf verschiedenen elementaren Eigenschaften der logistischen Funktion beruht. Vgl. auch P. GLUR: Über analytische Ausgleichung der Sterblichkeitsfläche, Lösung der akademischen Preisaufgabe der Philosophischen Fakultät II der Universität Bern (Durch das Studium der Bevölkerungssterblichkeit, insbesondere in der Schweiz, ist zu untersuchen, welche Funktionen die Abnahme der Sterblichkeit wiederzugeben vermögen.), eingereicht am 1. Oktober 1944.

Wenn wir die hier erörterten Beispiele mit den Resultaten unserer Untersuchung in Zusammenhang bringen, so gehen wir von der Voraussetzung aus, daß das Prinzip der Erfahrungsnachwirkung auch in irgendeiner Form in der belebten Welt gültig sein wird, so daß sich die Veränderung lokaler Konstanten biologischer Gesamtheiten innerhalb großer Zeiträume von diesem Gesichtspunkt aus betrachten läßt.

[1] L. EULER: De serie Lambertiana, Opera Omnia, Serie 1, Bd. 6, S. 354. Vgl. auch G. PÓLYA und G. SZEGÖ: Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis (Berlin 1925), 1. Bd., S. 125, Aufgabe Nr. 209 (Lösung S. 301, Nr. 209). Dort wird die Inversion auf Grund der BÜRMANN-LAGRANGEschen Reihe vollzogen. Der von uns eingeschlagene Weg wurde dagegen auch von G. BOL: Über eine kombinatorische Frage, Abhandlungen aus dem Math. Seminar der Hansischen Universität (1938), 12. Bd., 242—245, beschritten.

zurückgegriffen werden; danach konvergiert die Reihe (17) für alle t, für die

$$\omega e^{\omega(1-\lambda t)} < \frac{1}{e}$$

ausfällt. So ergibt sich als Konvergenzbedingung

$$t > \frac{1}{\omega\lambda} \log \left[\omega e^{\omega+1}\right]. \qquad (18)$$

Die von uns erhaltene Reihendarstellung konvergiert somit für ausreichend große t. Im Falle, daß

$$\omega e^{\omega+1} < 1,$$

also für alle

$$\omega < \sum_{1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^{n-1} e^{-n}}{n!} = 0{,}278464\ldots, \qquad (19)$$

konvergiert die Reihe (17) für alle $t \geqq 0$.

Wenn man die in der Darstellung (17) stehende Reihe mit dem ersten Glied abbricht, so ergibt sich wieder die bereits auf andere Weise gewonnene asymptotische Formel (9).

Vorläufige Mitteilungen - Communications provisoires Comunicati provvisori - Preliminary reports

Für die vorläufigen Mitteilungen ist ausschließlich der Autor verantwortlich. – Les auteurs sont seuls responsables des opinions exprimées dans ces communications. – Per i comunicati provvisori è responsabile solo l'autore. – The Editors do not hold themselves responsible for the opinions expressed by their correspondents.

Über die Einwirkung von Chlordioxyd auf Pektinstoffe

Nach verschiedenen Untersuchungen[1] werden *Polysaccharide* von *Chlordioxyd* nur sehr langsam angegriffen. Bei der Einwirkung dieses Oxydationsmittels auf reine Zellulose wird, wie jodometrisch leicht bestimmbar ist, kein Chlordioxyd verbraucht, und es ist auch keine Zunahme an Karboxylgruppen der Zellulose festzustellen. *Inkrusten* wie Lignin und Gerbstoffe werden durch Chlordioxyd jedoch weitgehend in kleinermolekulare Bruchstücke zerlegt.

Die Beständigkeit hochmolekularer, wasserlöslicher *Pektinstoffe* gegenüber *Oxydationsmitteln* kann einfach durch *Viskositätsbestimmungen* an den wässrigen Reaktionslösungen verfolgt werden. Auf diesem Weg wurde bereits früher (Helv. Chim. *26*, 2002, 1943) der oxydative Pektinabbau verfolgt. Es zeigen sich schon deutliche Abnahmen der Viskosität, wenn ein Verbrauch des Oxydationsmittels und eine Zunahme von Aldehyd- und Karboxylgruppen des Pektins analytisch noch kaum zu ermitteln sind. — Die Viskosität wird durch die *Zähigkeitszahl Z* charakterisiert. ($Z = \eta_{sp}/m$. $\eta_{sp} = \eta_{rel} - 1$; η_{rel} = Verhältnis der Viskosität der Lösung zur Viskosität des Lösungsmittels. m = Milliäquivalente Grundmolekül des Pektins pro 100 ccm Lösung.)

Die folgenden Messungen zeigen, daß Pektinstoffe durch Chlordioxyd nur in sehr geringem Umfang abgebaut werden. Dabei wurden folgende Faktoren variiert: Einwirkungsdauer des Chlordioxydes, Temperatur, Konzentration des Chlordioxydes und die Wasserstoffionenkonzentration. Aromatische Begleitstoffe des Pektins (Gerb- und Farbstoffe) scheinen jedoch mit Chlordioxyd leicht wegoxydiert werden zu können.

Nach Tabelle 1 greifen Jod und Chlordioxyd Pektin nicht an. Im Gegensatz zum Chlordioxyd wirkt Jod nicht oxydierend auf die Begleitstoffe des Pektins. Auch schon 0,001 molare Chlor- und Bromlösungen bedingen einen deutlichen Pektinabbau.

Tabelle 1

Einfluß verschiedener Oxydationsmittel

Wäßrige Lösungen.
Oxydationsmittel 0,01 molar.
Pektin (Äqu.-Gewicht 720) 0,20%.
Temperatur 20° C.
Einwirkungsdauer 72 Stunden.
Zähigkeitszahl Z_0 (zu Beginn des Versuches) = 1,62.

Oxydationsmittel	Zähigkeitszahl Z in % von Z_0
Chlor	13,8
Brom	30,7
Jod	100
Chlordioxyd	100

Ganz ähnliche Ergebnisse wie in Tabelle 1 wurden bei verschiedenen anderen Pektinpräparaten erhalten. Natriumpektat zeigte — unter sonst gleichen Versuchsbedingungen — durch Chlordioxyd einen sehr geringen Abbau auf 96,5% der Ausgangszähigkeitszahl.

Tabelle 2 zeigt, daß bei höherer Konzentration des Chlordioxydes Pyridinpektat nur ganz schwach abgebaut wird. Pektin blieb unangegriffen. (Eine geringe Viskositätsabnahme kann auch durch Spuren von Salzsäure, die bei der Oxydation von Begleitstoffen entsteht, verursacht werden. Geringe Säuremengen vermindern allgemein die Viskosität von Pektinstofflösungen.)

Bei einer anderen Versuchsreihe wurde die *Temperatur* zwischen 20 und 90° C variiert. Ein hydrolytischer Pektinabbau trat ohne und mit Chlordioxyd in dem gleichen Umfang ein, und zwar in Übereinstimmung mit den Ergebnissen von F. WEBER (Dissertation, Zürich, 1944) erst oberhalb 60° C.

[1] E. SCHMIDT und Mitarbeiter. Viele Arbeiten seit 1923 in B.-W. J. KOMAREWSKI, Angew. Chem. *42*, 336 (1929). M. SAMEC und F. ULM, Kollchem. Beih. *43*, 287 (1936). H. STAUDINGER und Mitarbeiter B. *70*, 2502 (1937), Papierfabr. *35*, 462 (1937) und Naturw. *29*, 534 (1941). C. V. HOLMBERG und E. C. JAHN, Paper Trade J. *111*, 33 (1940). H. KORTE und W. KAUFMANN, Melliand Textilber. *23*, 234 (1942).